בס"ד

מתמטיקה דיסקרטית

ד"ר נועה לוינשטיין

052-4542398

noa.lewenstein@gmail.com

מתרגל משה רען.

הרכב הציון:
תרגילים - 15%

ספר: מתמטיקה בדידה: נתי ליניאל ומיכל פרנס - יותר סיפורי.
לא חובה. שי גירון ושוני דר - יותר לימודי, יותר תרגילים.

תרגול- רען שכטר - 0545331043

10.11.16 בס"ד

לוגיקה מתמטית

סוג של שפה, טרמינולוגיה, בעלת מרכיבי שפה.

איך נכון להביע דברים בצורה מתמטית.

מרכיבי הלוגיקה:
1. תחביר (סינטקס)
2. משמעות (סמנטיקה)
3. מערכת ההסקה/ההיסק (חוקים/כללים)

לוגיקה פסוקית - הפשוטה ביותר.

פסוק:
- פסוק אטומי - לא ניתן לפצל אותו לחלקים
- פסוק מורכב - מורכב ממס' פסוקים אטומיים

אמיתות/שקריות פסוק:
- אמיתות ושקריות של הפסוקים האטומיים
- סוג "התפורה" של הפסוקים האטומיים קשרים - משהו שמאפשר לייצר קשרים מורכבים.

פסוק אטומי - לא מכיל קשרים (נקרא גם משתנה פסוקי)

פסוק מורכב - מכיל קשר אחד לפחות

$p, q, r, s \ldots$ - מקובל להשתמש בסימונים אלו בלוגיקה.
מתן שם לפסוק ע"י $p =$ היום יום חמישי.
$q =$ עכשיו השמש זורחת
ערך אמת - F (false), T (true) $(0-F, 1-T)$

קשרים

1. "וגם" מסומן ע"י $\wedge$ לדוגמה $p \wedge q$
המשמעות: יהיה בעל ערך אמיתי אם שני הפסוקים שמרכיבים אותו יהיו אמיתיים.

2. "או" מסומן ע"י $\vee$ לדוגמה $p \vee q$
המשמעות: יהיה בעל ערך אמיתי אם לפחות אחד מהפסוקים המרכיבים אותו יהיה אמיתי.

3. "לא" - קשר השלילה, מסומן ע"י $\neg$ (או $\sim$) לדוגמה $\neg p$
המשמעות: יהיה בעל ערך אמיתי אם הפסוק הוא שקרי ולהפך.

4. קשר הגרירה, קשר "אם... אז..." מסומן ע"י $\rightarrow$
לדוגמה $p \rightarrow q$. p - הנחה, q - מסקנה
כשההנחה שקרית, הפסוק יהיה אמיתי!

5. קשר הגרירה הכפולה, קשר "אם ורק אם" או בקיצור "אמ"מ", מסומן ע"י $\leftrightarrow$ לדוגמה $p \leftrightarrow q$
המשמעות: אם שניהם יהיו שקריים או שני הפסוקים יהיו אמיתיים, הפסוק יהיה אמיתי

בס״ד

<u>סדר קדימויות:</u>

1. $\neg$
2. $\wedge$
3. $\vee$
4. $\rightarrow$
5. $\leftrightarrow$

17.11.16 בס"ד

לוגיקה מתמטית - המשך

טבלת האמת צריכה לכלול מס' עמודות של מס' הפסוקים האטומיים ועוד אחד. עמודות המשתנים + עמודה של הפסוק כולו.
מס' השורות יהיה 2 בחזקת מס' הפסוקים האטומיים.

לא חובה לבצע שימוש בעמודות עזר.

פסוק שכולו T הוא **טאוטולוגיה** (הכל בטבלת האמת הוא T, בכל ההצבות האפשריות). הפסוק תמיד נכון.

פסוק שכולו F הוא **סתירה** (הכל בטבלת האמת הוא F, בכל ההצבות האפשריות). הפסוק תמיד שקרי.

פסוק **"ניתן לסיפוק"** - אם הוא לא סתירה. מספיק הצבה אחת שנותנת T.

$\neg p \vee q \qquad p \to q$

p	q	$\neg p \vee q$	$p \to q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

פסוקים שקולים לוגית:
מסמנים כך $\alpha \equiv \beta$.
α ו-β שקולים לוגית אם יש להם אותה טבלת אמת.
דוגמה מצד שמאל: $\neg p \vee q \equiv p \to q$

כלל פישוט לדוגמה:

$p \to q \equiv \neg p \vee q$ פירוט בעמ' 6 בנספח מבוא ללוגיקה מתמטית (וו"ס).

דוגמה:

- $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \overset{\text{פילוג}}{\equiv} (p \vee \neg p) \wedge q \overset{\text{טאוטולוגיה}}{\equiv} T \wedge q \overset{\text{זהות}}{=} q$
- $((p \vee q) \wedge \neg q) \wedge \neg p \overset{\text{קיבוץ}}{\equiv} (p \vee q) \wedge (\neg q \wedge \neg p) \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv}$
  $(p \vee q) \wedge \neg (q \vee p) \overset{\text{חוק החילוף}}{\equiv} \underbrace{(p \vee q)}_{\alpha} \wedge \neg \underbrace{(p \vee q)}_{\alpha} \equiv F$ סתירה.
- הוכחת חוק הבליעה:
  $p \vee (p \wedge q) \overset{\text{חוק הזהות}}{\equiv}$
  $(p \wedge T) \vee (p \wedge q) \overset{\text{פילוג}}{\equiv}$
  $p \wedge (T \vee q) \overset{\text{שליטה}}{\equiv} p \wedge T \overset{\text{כלל הזהות}}{\equiv} p$

הגדרה של קבוצה שלמה של קשרים - כאשר הקשרים מספיקים לנו כדי להביע כל פסוק שנרצה, נקרא לקב' הקשרים קבוצה שלמה.
לדוגמה: $\{\neg, \vee, \wedge\}$ קב' הקשרים הזו היא קבוצה שלמה.

חוק דה-מורגן: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

$(p \wedge q) \equiv \neg(\neg(p \wedge q)) \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$

לכן מיותר צריך וגם...

גם $(\vee, \neg)$ קבוצה שלמה של קשרים

$(\neg, \rightarrow)$ לחשוב למה זה נכון.

מבוא ללוגיקה מתמטית

קבוצות שלמות של קשרים

הטענה: הקבוצה $\neg, \wedge, \vee$ היא קבוצה שלמה של קשרים

שיטה: בהינתן טבלת אמת, ניצור ע״פ שיטה פסוק השקול לפסוק המקורי שלנו (אותה טבלת האמת).

p	q	r	α (פסוק מקורי)	$p\wedge q\wedge r$	$p\wedge\neg q\wedge r$	$\neg p\wedge\neg q\wedge r$
T	T	T	T	T	F	F
T	T	F	F	F	F	F
T	F	T	T	F	T	F
T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	T
F	F	F	F	F	F	F

פסוק שקול: **DNF**: $(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)$

ליטרל = או הפסוק האטומי או השלילה שלו.

השיטה:
בוחרים רק את השורות בהן הפסוק אמיתי (T). עבור כל שורה שבחרנו מייצרים פסוקית המגלה את הפסוק יסודי/האטומים כך:
אם הפסוק ~~המקור~~ האטומי הוא F, נשים עליו $\neg$. בין הפסוקיות נוסיף $\vee$. בתוך הפסוקית נשים $\wedge$.

אם הטבלה היא סתירה (כולה F), במקרה הזה נרשום $p\wedge\neg p$.

אם רוב הטבלה (הוא F ולא T), נתייחס ל- $\neg$ של הפסוק, לבנות פסוק שקול ואז לקחת את ה- $\neg$ שלו.

CNF: $(\underset{\text{ליטרלים}}{\_}\vee\_\vee\_)\wedge(\_\vee\_\vee\_)$

ב- CNF מתייחסים ל-F-ים. אם הפסוק הוא T, נשים עליו $\neg$. מתייחסים רק לשורות ה-F.

בס"ד

עד עכשיו, תחשיב הפסוקים...

תחשיב היחסים
(הפרדיקטים)

אם הפסוק אמיתי או שקרי זה תלוי בעולם (אין טבלאות אמת).

מה לא היינו יכולים לנסח בלוגיקה הפסוקית?
- כל אחד מהאנשים פה הוא סטודנט.

2 בעיות:
- מס' אינסופי או ארוך ממש של פסוקים אטומיים
- אובדן בגלל הקשירה בין הפסוקים האטומיים (למשל שכולם סטודנטים), כל פסוק עומד בפני עצמו.

	תמונה
יובל הוא סטודנט	סטודנט (יובל) ← ניתן לומר T או F
אורז הוא סטודנט	סטודנט (אורז)

$\underbrace{\text{סטודנט}}_{\text{יחס}}$ (x) ← לא פסוק, אין אמת ושקר.
משתנה אליו ניתן להציב פריט.
תלוי בפריט שמציבים בתוך x.

ניתן לומר T או F רק אחרי שניקח משהו מהעולם ונציב בסוגריים.
מוסיפים ללוגיקה יחסים.

$\forall$ - לכל (לסימן קוראים כמת, וברבים כמתים), צריך להיות קיים לכולם בעולם.
לכן כשהעולם כזה הוא אמיתי.
כל מי שנמצא בכיתה הוא סטודנט - $\forall x$ סטודנט(x)

$\exists$ - קיים, המשמעות יש, מספיק שיהיה אחד בעולם

$\forall$, $\exists$ - שני הכמתים היחידים בלוגיקה.

מפריט לפסוק:
1. אם נציב פריט מהעולם
2. להשתמש בכמת.

1.12.16 מסק

יחס: $st(x)$ ← תמונה, x - משתנה.

כדי להפוך יחס לפסוק:
* להציב פרט מתוך העולם מתוך המשתנה.
* להשתמש בכמת: $\forall$ - לכל, $\exists$ - קיים.

למשל: $\forall x \; st(x)$

דוגמה: $pr(x,y)$ ← x הוא הורה של y.

(x - הורה, y - ילד)

$pr($יצחק, אברהם$)$ ← אמתי.

$pr($שרה, יעקב$)$ ← שקרי.

$pr($נח$, y)$ - לא פסוק, משתנה בלי ערך, ללא כמת.

$\exists y \; pr($נח$, y)$ - יש ילד שנח הוא ההורה שלו. פסוק אמתי.

$\forall y \; pr($נח$, y)$ - שקרי, לא לכל אדם בעולם.

כשהכמתים שווים אותו הדבר:

$\forall x \forall y \; pr(x,y)$ - לכל x ולכל y שתיקח יתקיים הפסוק. שקרי.

$\forall y \forall x$ - שקול לגמרי לפסוק הקודם.

$\exists x \exists y$ - אמתי, מספיק שנמצא זוג בודד שמקיים את הפסוק.

$\exists y \exists x$ - שקול לגמרי לפסוק הקודם.

$\forall x \exists y$ - לכל אחד בעולם יש מישהו שהוא ההורה שלו - שקרי.

$\exists y \forall x$ - מישהו בעולם שכל האנשים בעולם הורים שלו - שקרי.

$\exists x \forall y$ - יש מישהו בעולם שהוא הורה של כל האנשים בעולם - שקרי.

$\forall y \exists x$ - לכל אדם קיים מישהו שהוא ההורה שלו - אמתי.

דה-מורגן:

$$\neg \forall x \; R(x) \equiv \exists x \; \neg R(x)$$

$$\neg \exists x \; R(x) \equiv \forall x \; \neg R(x)$$

תורת הקבוצות

קבוצה -
אוסף כלשהו של פריטים מתוך העולם.

$\{\ ,\ ,\ ,\ \}$ ← איברי הקבוצה

- אין משמעות לסדר האיברים בקבוצה.
- נוהגים לסמן קבוצה באותיות גדולות.
- קבוצות שוות אם ורק אם הן מכילות את אותם האיברים.

$A=\{17,$ שולחן $,☺\}$

$A=B$ $\quad B=\{$שולחן$, ☺, 17\}$

$A\neq C$ $\quad C=\{☺, 17, ?\}$

- אין משמעות לאיברים כפולים (למופעים חוזרים)

$A=D$ $\quad D=\{$שולחן$, 17, ☺, 17, ☺, ☺\}$

- אם יש תכונה/מאפיין את כל איברי הקבוצה אז:

$\{x \mid x$ סטודנט בדיסקרטית $\}$

המשתנה.   כך ש..   תכונה, "כרטיס כניסה" לקבוצה.

- המושג "שייך":

$17\in A$
$☺\in A$

$\neg($כוס$\in A) =$ כוס $\notin A$

$$A=B \equiv \forall x\ [x\in A \leftrightarrow x\in B] \equiv$$

$$\forall x\ [(x\in A \rightarrow x\in B)\wedge(x\in B\rightarrow x\in A)]$$

- קבוצה יכולה להיות גם אינסופית:
  - כל המספרים הזוגיים

$\{x \mid x$ מס' זוגי$\}$

$\{\dots,-6,-4,-2,0,2,4,6,\dots\}$

- הגדרה: תהי A קבוצה סופית, הגודל של A יסומן כ-$|A|$ והוא מס' האיברים ב-A.

$|\{17\}|=1 \quad |\{0\}|=1 \quad |\{?\}|=1$

- הקבוצה הריקה: ריק → $\{\ \}$ $\quad |\{\ \}|=0$

הסימון המקובל $\emptyset$

המשך

· ניתן ליצור קבוצה המכילה קבוצות אחרות:

$$G = \{ \underbrace{\{17, \text{☺}, \text{שולחן}\}}, \underbrace{18} \}$$

$$|G| = 2$$

שני האיברים הם מסוגים שונים - איבר מסוג קבוצה ואיבר מסוג מספר.

$$\{17, \text{☺}, \text{שולחן}\} \in G$$

· המושג "מוכל" - יחס בין שתי קבוצות.

הגדרה: תהיינה A ו-B קבוצות, נאמר ש-A מוכלת ב-B ונסמן $A \subseteq B$ אם כל האיברים השייכים ל-A שייכים גם ל-B.

$$\{17, \text{שולחן}\} \subseteq \{17, \text{שולחן}, \text{☺}\}$$

$$\{17\} \notin \{17, \text{שולחן}, \text{☺}\}$$

$$17 \in \{17, \text{שולחן}, \text{☺}\}$$

$$A \subseteq B \equiv \forall x \; x \in A \rightarrow x \in B$$

$\emptyset \subseteq A \quad \forall x \underbrace{(\underbrace{x \in \emptyset}_{F} \rightarrow x \in B)}_{T}$ ⇐ הפסוק אמיתי.

8.12.16

ע״י הגבלת העולם, ניתן להגביל את סוג האיברים בקבוצה.

U - סימון של העולם.

$\in$ ← שייך, תנאי בין איבר לקבוצה - $\in$ בקבוצה (שייך לקבוצה), $\notin$ לא בקבוצה (לא שייך לקבוצה).

$\subseteq$ ← מוכל, קבוצות יכולות להיות:
- שוות
- שונות לחלוטין (כל האיברים שונים) - קבוצות זרות, קבוצות ללא אפילו איבר 1 משותף.
- חלק מהאיברים זהים בין הקבוצות
- קבוצה שכל האיברים בה נמצאים בקבוצה השניה. זו הכלה.

הכלה - סיטואציה בין 2 קבוצות שלם.

* $A \subseteq B$
- לכל קבוצה A, מתקיים ש- $A \subseteq A$
- לכל קבוצה A, מתקיים ש- $\emptyset \subseteq A$ $\qquad \emptyset = \{\}$

$\Downarrow$

$\emptyset \subseteq \emptyset$

קב׳ בגודל 1 - $\{\emptyset\}$ $\qquad$ קב׳ בגודל 0 - $\emptyset$

$\emptyset \in \{\emptyset\}$ → נכון. האיבר הקיים בקבוצה.

$\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ → אמת תמיד

$\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$ → לא נכון. איבר $\emptyset$ לא נמצא בקבוצה $\{\{\emptyset\}\}$

$\emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}\}$ → אמת תמיד.

$\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ → אמת, האיבר $\{\emptyset\}$ נמצא גם בקבוצה $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

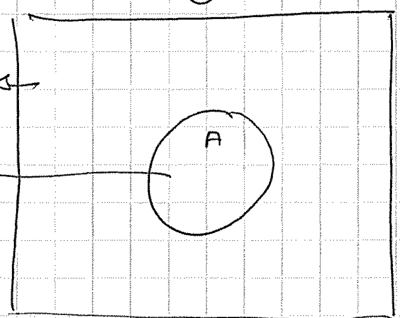
$\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ → אמת - $\emptyset$ מוכל ב- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$\{\emptyset\} \qquad \{\{\emptyset\}\}$ אמת - $\{\emptyset\}$ איבר ב- $\{\{\emptyset\}\}$

$\{\underbrace{\emptyset}_{\text{איבר}}\} \subseteq \{\{\emptyset\}\}$ שקר. $\emptyset$ לא מוכל ב- $\{\{\emptyset\}\}$

בס"ד

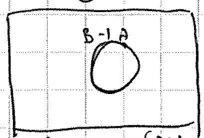
דיאגרמת וֶן:



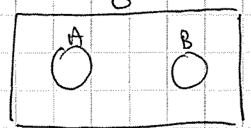
שטח המייצג איברים שאינם בקבוצה.

שטח המייצג את איברי הקבוצה

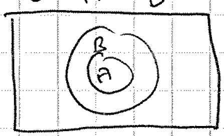
שתי קבוצות שוות — נופלות אחת על השניה



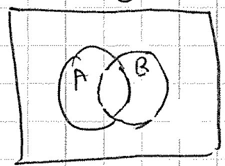
שתי קבוצות זרות



מוכל

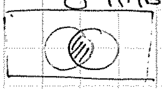


אם ורק אם - $\Longleftrightarrow$, $\leftrightarrow$, $\equiv$



פעולות על קבוצות:

1. "חיתוך" - תהיינה A ו-B קבוצות, החיתוך של A ו-B הוא:
$\{x \mid x\in A \text{ וגם } x\in B\}$

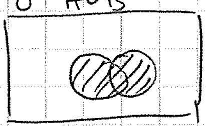


סימון: $A\cap B$

מבחינה לוגית:

$$\forall x \quad x\in A\cap B \leftrightarrow x\in A \ \wedge \ x\in B$$

2. "איחוד" - תהיינה A ו-B קבוצות, האיחוד של A ו-B הוא:
$\{x \mid x\in A \text{ או } x\in B\}$

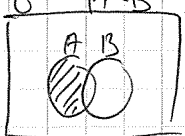


סימון: $A\cup B$

מבחינה לוגית:

$$\forall x \quad x\in A\cup B \leftrightarrow x\in A \ \vee \ x\in B$$

3. "הפרש" - תהיינה A ו-B קבוצות. ההפרש של A ו-B הוא:
$\{x \mid x\in A \text{ וגם } x\notin B\}$



סימון: $A\setminus B$ (או $A-B$).

בהפרש, סדר הקבוצות משנה!!!

$$\forall x \quad x\in A\setminus B \leftrightarrow x\in A \ \wedge \ x\notin B$$
$$(\neg(x\in B))$$

מוסף

4. "משלים" - תהי A קבוצה. המשלים של A הינו

$$\{x \mid x \notin A\}$$

סימון $\bar{A}$

$$\bar{A} = U \setminus A$$

$$\forall x \quad x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A$$

* $\emptyset - B$.

$\{x \mid x \in \overset{\emptyset}{A}$ וגם $x \in B\}$

אין שום דבר להכניס לשם $\emptyset - B = \emptyset$

* $A - \emptyset = A$

תהי A קבוצה כלשהי:

1. $A \cap \emptyset = \emptyset$ — $A \cap \emptyset = \{x \mid x \in A$ וגם $x \in \emptyset\} = \emptyset$
2. $A \cup \emptyset = A$ — $A \cup \emptyset = \{x \mid x \in A$ או $x \in \emptyset\} = A$
3. $A \cap A = A$
4. $A \cup A = A$
5. $A \setminus A = \emptyset$
6. $A \setminus \emptyset = A$
7. $\emptyset - B = \emptyset$
8. $A \cap \bar{A} = \emptyset$
9. $A \cup \bar{A} = U$
10. $\overline{(\bar{A})} = A$

15.12.16 מספר

קבוצות-המשך

צ"ל
$$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$$

* הגדרה של שוויון בין 2 קבוצות:

$$A=B \equiv \forall x \quad x\in A \overset{\text{אם ורק אם.}}{\leftrightarrow} x\in B$$

ולכן צריך להוכיח:

$$\forall x \quad x\in A\cap(B\cup C) \leftrightarrow x\in (A\cap B)\cup(A\cap C)$$

יהי x כלשהו

צ"ל: $x\in A\cap(B\cup C) \leftrightarrow x\in (A\cap B)\cup(A\cap C)$

$$x\in A\cap(B\cup C) \xleftrightarrow{\text{הגדרה}} x\in A \overset{\text{וגם}}{\wedge} x\in(B\cup C) \xleftrightarrow{\text{הגדרת איחוד}}$$

$$x\in A \overset{\text{וגם}}{\wedge} (x\in B \overset{\text{או}}{\vee} x\in C) \xleftrightarrow{\text{חוק הפילוג בלוגיקה}}$$

$$(x\in A \overset{\text{וגם}}{\wedge} x\in B) \overset{\text{או}}{\vee} (x\in A \overset{\text{וגם}}{\wedge} x\in C) \xleftrightarrow{\text{הגדרת חיתוך}}$$

$$x\in \overset{\text{חיתוך}}{A\cap B} \overset{\text{או}}{\vee} x\in \overset{\text{חיתוך}}{A\cap C} \xleftrightarrow{\text{הגדרת איחוד}}$$

$$x\in (A\cap B)\overset{\text{איחוד}}{\cup}(A\cap C)$$ מ.ש.ל.

מתחילים עם קבוצות ← עוברים לקשרים לוגיים ← חוזרים לפעולות על קבוצות.

צ"ל
$$\overline{A\cap B} = \bar{A}\cup\bar{B}$$

$$\forall x \quad x\in\overline{A\cap B} \leftrightarrow x\in\bar{A}\cup\bar{B}$$

יהי x כלשהו.

$$x\in\overline{A\cap B} \leftrightarrow \bar{A}\cup\bar{B}$$

$$x\in\overline{A\cap B} \xleftrightarrow{\text{הגדרת משלים}} x\notin A\cap B \leftrightarrow \neg(x\in(A\cap B)) \xleftrightarrow{\text{הגדרת חיתוך}}$$

$$\neg(x\in A \overset{\text{וגם}}{\wedge} x\in B) \xleftrightarrow{\text{דה מורגן בלוגיקה}}$$

$$\neg x\in A \vee \neg x\in B \leftrightarrow x\notin A \vee x\notin B \xleftrightarrow{\text{הגדרת משלים}}$$

$$x\in\bar{A} \cup x\in\bar{B} \xleftrightarrow{\text{הגדרת איחוד}} x\in\bar{A}\cup\bar{B}$$

בס״ד

הוכח או סתור - דוגמה:

$$(A\cup B)\cap C \stackrel{?}{=} A\cup (B\cap C)$$

דוגמה נגדית שלי:

$(A\cup B)\cap C = A\cup (B\cap C)$

$A=2 \quad B=3 \quad C=\emptyset$

$\emptyset \qquad 2$

• הדרך הנכונה היא: לנסות להפריך מה שאמורה להיות הטענה

• הדרך הכי מוצלחת המחשה של נוסח הינו: דיאגרמת ון (לקבל המחשה):

לא שקולים, לא אותם השטחים ב-2 הצורות.

- אם בדיוק אותם השטחים צבועים, סימן שיש שוויון וצריך לגשת להוכחה.
- אם השטחים הצבועים לא אותם השטחים, אין שוויון.

<u>דוגמה</u>:

$A=\{1\}$
$B=\emptyset$
$C=\emptyset$

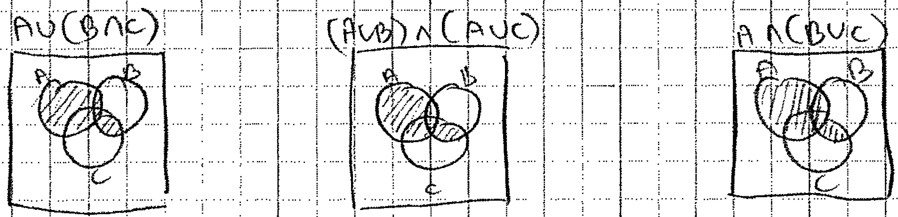
$$(A\cup B)\cap C=\{\{1\}\cup\emptyset\}\cap\emptyset=\emptyset$$

$$A\cap(B\cup C)=\{1\}\cup(\emptyset\cap\emptyset)=\{1\}$$

<u>מש״ל</u> $\{1\}\neq\emptyset$ כי השוויון לא מתקיים.

- מטלות - לצייר בדיאגרמת-ון עבור חוק הפילוג.

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $\qquad A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$



בס"ד

הוכחות

איך ניגשים להוכחת טענת גרירה?

• צ"ל אם p אז q

או

צ"ל $p \to q$

שיטה מס' 1:

אין צורך לבדוק ← $\underbrace{p_F \to q}_{T}$

צריך לבדוק ← $\underbrace{p_T \to q_T}_{T}$

שקול..

נניח ש-p הוא אמת. ⇐ נתון: p (← אם נתון אז אמיתי)

צ.ל. ש-q אמיתי. צ"ל: q (← צ"ל q אמיתי).

טיוטה - סכמה להצגה לפתרון

נתונים		מטרה
נתונים מקוריים	(1)	q
	(2)	
נתון חדש	(3) p	

תרגיל דוגמה:

- תהיינה A, B ו-C קבוצות כך ש $A \subseteq C$ ו-B ו-C זרות. הוכיחו שאם $x \in A$ אז $x \notin B$
- צ"ל $x \in A$ אז $x \notin B$
- נניח $x \in A$

צריך להוכיח $x \notin B$

טיוטה

	נתונים	מטרה
נתונים מקוריים	(1) $A \subseteq C$	$x \notin B$
	(2) B-ו C זרות	
	(3) $x \in A$	

הוכחה

$\underbrace{x \in A}_{\text{הנ"ח}} , \underbrace{A \subseteq C}_{\text{נתון}} \xrightarrow{\text{הגדרת הכלה}}$ משמאל [illegible]

$x \in C$, $\underbrace{\text{B-ו C זרות}}_{\text{נתון}} \longrightarrow x \notin B$ מ.ש.ל.

(הערה: $A \cap B = \emptyset \iff$ A-ו B זרות)

בס"ד

תרגיל דוגמה 2:

טענה: תהינה A ו-B קבוצות:

$$(A\cup B)-B\subseteq A$$

הוכחה:

הגדרה: $A\subseteq B\equiv\forall x\ \ x\in A\to x\in B$

צ"ל $(A\cup B)-B\subseteq A$

צ"ל $\forall x\ \ x\in(A\cup B)-B\to x\in A$

יהי x כלשהו

$$x\in(A\cup B)-B\to x\in A$$

נניח $x\in(A\cup B)-B$

צ"ל $x\in A$

סימון

הנחות	מטרה
$x\in(A\cup B)-B$	$x\in A$

$$\underbrace{x\in(A\cup B)-B}_{T}\xrightarrow{\text{הגדרת הפרש}}x\in(A\cup B)\wedge x\notin B\xrightarrow{\text{הגדרת }\cup}$$

$$\underbrace{(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\notin B)}_{T}\xrightarrow{\text{חוק הפילוג}}$$

$$\underbrace{(x\in A\wedge x\notin B)\vee\underbrace{(x\in B\wedge x\notin B)}_{F\text{ סתירה}}}_{T}\to$$

מחויבים להיות אמת כדי שהפסוק יהיה אמיתי

$$\underbrace{\overset{T}{x\in A}\wedge\overset{T}{x\notin B}}_{T}\to x\in A$$

מ.ש.ל.

22.12.16 בס"ד

צ.ל. $p \to q$

1) הגישה הישירה:

נניח: p צ.ל.: q

2) $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$ שקילות לוגית.

שיטת הנגדיות:

תרגיל

תהיינה A,B,C,D קבוצות כך ש- $A-B \subseteq C \cap D$

תהי $x \in A$

הוכיחו: אם $x \notin D$ אז $x \in B$

נניח $x \notin B$

צ.ל: $x \in D$

טיוטה

נתונים	מטרה
1. $A-B \subseteq C\cap D$	$x \in D$
2. $x \in A$	
3. $x \notin B$	

$$x \in A \wedge x \notin B \xRightarrow{\text{הגדרת הפרש}} \underset{A-B \subseteq C\cap D}{x \in A-B} \xRightarrow{\text{הגדרת } \subseteq} x \in C \cap D \Rightarrow$$

$$x \in C \wedge x \in D \Rightarrow x \in D$$

3) $p \to q \equiv (p \wedge \neg q) \to F$

דוגמאות לסתירה:

$x \in D \wedge x \notin D$

$x \in A \wedge x \in A$

$A \cap B \neq \emptyset \wedge x \in A \wedge x \in B$

$x \notin \emptyset$

צ.ל. $p \to q$

צ.ל. $(p \wedge \neg q) \to F$

נניח $p \wedge \neg q$

צ.ל. F

נניח p, נניח $\neg q$

צ.ל. F

תרגיל:

תהיינה A,B,C כך ש- $A \cap C \subseteq B$

הוכיחו: אם $x \in C$ אז $x \notin A-B$

נניח $x \in C$

צ.ל. $x \notin A-B$

נניח (בשלילה) $x \in A-B$

כשמשתמשים בדרך השלילה, לא כותבים צ.ל. false

טיוטה

נתונים:	מטרה:
1. $X \cap C \subseteq B$	סתירה.
2. $x \in C$	
3. $x \in A-B$	

בס"ד

$x \in A - B \Rightarrow x \in A \wedge \boxed{x \notin B}$

$x \overset{\text{נתון}}{\in} C \wedge x \in A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \in A \cap C \\ A \cap C \subseteq B \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x \in B}$

$\Downarrow$

$x \notin B \wedge x \in B$ כן סתירה ולכן מש"ל.

<u>תרגיל</u>

יהיו A, B, C קבוצות כך ש $A - C \subseteq B$

<u>הוכיחו:</u> $A - B \subseteq C$

[הגדרת הכלה: $A \subseteq B \equiv \forall x \; x \in A \rightarrow x \in B$]

נניח $x \in A - C$ צ"ל $x \in B$

נניח בשלילה $x \notin B$

<u>סיכום</u>

<u>נתונים</u>	<u>מסקנה</u>
1. $A - B \subseteq C$	סתירה
2. $x \in A - C$	
3. $x \notin B$	

$x \in A - C \rightarrow x \in A \wedge \boxed{x \notin C}$

$x \in A \wedge \underset{\text{נתון}}{x \notin B} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x \in A - B \\ A - B \subseteq C \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x \in C}$

סתירה, משל $x \notin C \wedge x \in C$

(עמ' 17 במטלה) בס"ד

קבוצת החזקה

הגדרה:

קבוצת החזקה של קבוצה נתונה.
- כל האיברים בה הם קבוצות
- כל תתי קבוצות של קבוצה נתונה (שמוכלות בה)

תהי A קבוצה

$$P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$$

$$B \in P(A) \iff B \subseteq A$$

דוגמאות:

א) $A = \{1,2\}$

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, A\}$

ב) $A = \{1,2,3\}$

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \overset{A}{\{1,2,3\}}\}$

$P(A) = \{\emptyset\}$

ג) $P(N) = \{B \mid B \subseteq N\}$

* לוקחים את כמות האיברים שבקבוצה (n) ואז 2^n יוצא את כמות האיברים שבקבוצה החזקה.

בס"ד

תרגילי כתה:

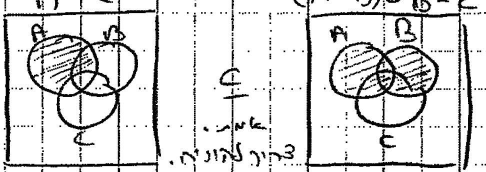
הוכח או סתור:

1. $A - C \subseteq (A-B) \cup (B-C)$ הוכ׳
2. $D \subseteq A \cup B \Leftrightarrow D \subseteq A \vee D \subseteq B$ הפר׳
3. $B \subseteq A \Rightarrow (A-B) \cup B = A$ הוכחה
4. $A - B = A - A \cap B$ הוכ׳

פתרונות:

1.

$A - C$ $\subseteq$ $(A-B) \cup (B-C)$



אמת.
צריך להוכיח.

$$\boxed{A - B = A \cap \bar{B}}$$

4.

$$A - A \cap B = A \cap (\overline{A \cap B}) \overset{\text{דה מורגן}}{=} A \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) \overset{\text{פילוג}}{=}$$

$$(A \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B}) = \emptyset \cup (A \cap \bar{B}) = A \cap \bar{B} = A - B$$

3. צ.ל. $B \subseteq A \Rightarrow (A-B) \cup B = A$

נניח $B \subseteq A$

צ.ל. $(A-B) \cup B = A$

$$A = B \equiv \forall x \; x \in A \leftrightarrow x \in B \equiv$$
$$\forall x ((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)) \equiv$$
$$\forall x (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall x (x \in B \rightarrow x \in A) \equiv$$
$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

א. צ.ל. $(A-B) \cup B \subseteq A$

ב. צ.ל. $A \subseteq (A-B) \cup B$

כיוון א:

נניח $x \in (A-B) \cup B$

צ.ל. $x \in A$

טיעון:

נתונים	צ״ל
1. $B \subseteq A$	$x \in A$
2. $x \in (A-B) \cup B$	

טיוטה

$x \in (A-B) \cup B \rightarrow x \in A-B \lor x \in B$

(נוכיח למקרים (2 מקרים, 1 T והשני F ולכן הכל)

(i) $x \in A-B \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A$

(ii) $x \in B \wedge B \overset{(נתון)}{\subseteq} A \Rightarrow x \in A$

הוכחנו $\subseteq$:

3ב. $A \subseteq (A-B) \cup B$

ניקח $x \in A$

$x \leq (A-B) \cup B$

5.1.17 בס"ד

תורת הקבוצות ...המשך!

תזכורת:

קבוצת החזקה - הגדרה:

תהי A קבוצה

קבוצת החזקה של A היא

S = set = קבוצה באנגלית

$$P(A)=\{S \mid S\subseteq A\}$$

אוסף כל תתי הקבוצות של A.

הערה!	
לכל A,	כי לכל A
$\emptyset\in P(A)$	$\emptyset\subseteq A$
$A\in P(A)$	$A\subseteq A$

הגדרה בפסוק לוגי:

$$S \overset{\text{שייך}}{\in} P(A) \leftrightarrow S \overset{\text{מוכל}}{\subseteq} A$$

דוגמאות:

1. $A=\emptyset$ $P(A)=\{\emptyset\}$
2. $A=\{1\}$ $P(A)=\{\emptyset,\{1\}\}$
3. $A=\{1,2\}$ $P(A)=\{\emptyset,\{1,2\},\{1\},\{2\}\}$
4. $A=\{1,2,3\}$ $P(A)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

* אם A סופית ו- $|A|=n$ אז $|P(A)|=2^n$
(נראה הוכחה בסמסטר ב').

5. $A=\mathbb{N}$ $P(\mathbb{N})=\{S \mid S\subseteq \mathbb{N}\}$

הוכח או הפרך!

1. $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ לא נכון! הפרכה: $P(A\cup B)\supseteq P(A)\cup P(B)$

דוגמה נגדית: $A=\{1\}$, $B=\{2\}$

$\{1,2\}\in P(A\cup B)=P(\{1,2\})$

$\{1,2\}\notin P(A)\cup P(B)=\{\emptyset,\{1\}\}\cup\{\emptyset,\{2\}\}=\{\emptyset,\{1\},\{2\}\}$

2. $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$ נכון

$P(A\cap B)\subseteq P(A)\cap P(B)$

$P(A\cap B)\supseteq P(A)\cap P(B)$

הוכחה!

א) נניח $S\in P(A\cap B)$ צ"ל $S\in P(A)\cap P(B)$

$S\in P(A\cap B)\rightarrow S\subseteq A\cap B \rightarrow S\subseteq A \wedge S\subseteq B \rightarrow S\in P(A)\wedge S\in P(B)\rightarrow S\in P(A)\cap P(B)$

$S\subseteq A\cap B\rightarrow S\subseteq A \wedge S\subseteq B$

* שאלה מתרגול

$S\subseteq A\cap B$ לכן $S\subseteq A \wedge S\subseteq B$

$S\subseteq A$ T

$S\subseteq B$ T

המשך

[illegible]

3. הוכחה $P(A)\cup P(B) \subseteq P(A\cup B)$

נניח $S\in P(A)\cup P(B)$

צ.ל. $S\in P(A\cup B)$

$S\in P(A)\cup P(B) \to S\in P(A)$ או $S\in P(B)$

נחלק למקרים: (1) $S\in P(A)$

$S\in P(A) \to S\subseteq A \to S\subseteq A\cup B \to S\in P(A\cup B)$

(2) $S\in P(B)$

$S\in P(B) \to S\subseteq B \to S\subseteq A\cup B \to S\in P(A\cup B)$

2.האק...

(I) נניח (1) $x\in S$ צ.ל $x\in A$

$\overset{\text{נניח (2)}}{x\in S}$, $\overset{\text{נניח (1)}}{S\in A\cap B} \to x\in A\cap B \to x\in A$

(II) נניח (3) $x\in S$ צ.ל $x\in B$

$\overset{\text{נניח (3)}}{x\in S}$, $\overset{\text{נניח (1)}}{S\in A\cap B} \to x\in A\cap B \to x\in B$

ב) נניח $S\in P(A)\cap P(B)$ צ.ל $S\in P(A\cap B)$

$S\in P(A)\cap P(B) \Rightarrow S\in P(A) \wedge S\in P(B) \to S\subseteq A \wedge S\subseteq B \xrightarrow{\text{טענה לפי}}$
$S\subseteq A\cap B \to S\in P(A\cap B)$

טענה לפי (2): $S\subseteq A \wedge S\subseteq B \to S\subseteq A\cap B$

נניח $S\subseteq A \wedge S\subseteq B$

צ.ל $S\subseteq A\cap B$

נניח $x\in S$ צ.ל $x\in A\cap B$

$$\left.\begin{array}{l} x\in S,\ S\subseteq A \to x\in A \\ x\in S,\ S\subseteq B \to x\in B \end{array}\right\} x\in A\cap B$$

נספח

n-יות סדורות.

הגדרה: יהיו a ו-b איברים.
האיבר (a,b) נקרא זוג סדור.

הגדרה: יהיו $a_1,a_2,\dots,a_n$ איברים.
האיבר $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ נקרא n-יה סדורה. (תמיד מס' איברים סופי).

12.1.16 בס"ד

זוג סדור - איבר מיוחד הנבנה משני איברים.
בזוג סדור יש משמעות לסדר האיברים, כלומר
(a,b) לא זהה ל- (b,a).
באופן זהה לזוג סדור, ניתן להתייחס גם לשלשה
סדורה או רביעיה סדורה.
האיברים לא חייבים להיות מאותו הסוג, ולא
חייבים להיות איברים פשוטים.

דוגמת אולם קולנוע:

$A=\{1,2,\dots,10\}$ מספרי השורות
$B=\{1,2,\dots,12\}$ מספרי השורה

אולם $=\{(1,5),(7,2),\dots\}$

הקבוצה אולם תכיל 120 איברים שונים
הקבוצה בה לוקחים את כל הזוגות הסדורים האפשריים נקראת
מכפלה קרטזית.

הגדרה:
תהיינה A ו-B קבוצות, המכפלה הקרטזית של A ו-B
היא הקבוצה

סימון: $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,\ y\in B\}$

פסוק לוגי:

$x\in B \wedge x\in A \iff (x,y)\in A\times B$

*סדר המכפלה הקרטזית קובע את הסדר בתוך הזוג הסדור!

הערות:
1. $A\times\emptyset=\emptyset \qquad \emptyset\times A=\emptyset$
2. בכלל: $A\times B\neq B\times A$

טענה: $A\times B=B\times A \iff A=B$ או $A=\emptyset$ או $B=\emptyset$

הוכחת הטענה:
$(\Leftarrow)$ נניח: $A=B$ או $A=\emptyset$ או $B=\emptyset$
צ"ל: $A\times B=B\times A$

כשיש "או", מפרידים למקרים כל פעם לוקחים את אחת האופציות כאילו T, ומשם לא אכפת לנו.

נפריד למקרים:
א: $A=B$

$A\times \overset{A}{\overset{\shortparallel}{B}}=\overset{B}{\overset{\shortparallel}{A}}\times A=\overset{A}{\overset{\shortparallel}{B}}\times A$

ב. $A=\emptyset$ $\quad A\times B=\emptyset\times B=\emptyset=B\times\emptyset=B\times A$

ג. $B=\emptyset$ $\quad A\times B=A\times\emptyset=\emptyset=\emptyset\times A=B\times A$

(ב.ג. ניתן לכתוב בלי הגבלת הכלליות (ב.ה.כ.) נניח $A=\emptyset$
או שמתחילים מג. מוכיחים באופן דומה למקרה ב').

4

הדבר הכי פשוט הוא שצריך להוכיח או הוא הדבר השלילה.

מק"פ

($\Leftarrow$) נתון $A \times B = B \times A$

צ"ל $A=B$ או $A=\emptyset$ או $B=\emptyset$

הוכחה בדרך השלילה

נניח בשלילה: $A \neq B$ וגם $A \neq \emptyset$ וגם $B \neq \emptyset$

$A \neq B$ אומר שיש לפחות איבר אחד שקיים בק' אחת ולא קיים בק' השניה.

סיכום:

נתונים:
1. $A \times B = B \times A$
2. $A \neq B$
3. $A \neq \emptyset$
4. $B \neq \emptyset$

מטרה:
סתירה.

$A \neq B \Rightarrow$ קיים $x \in A$ כך ש $x \notin B$
או
קיים $y \in B$ כך ש- $y \notin A$

נפריד למקרים:
א. (נניח כי) קיים $x \in A$ כך ש $\underline{x \notin B}$
נתון: $B \neq \emptyset \Rightarrow \underline{z \in B}$

$$x \neq z \left\{ \begin{array}{l} x \notin B \\ z \in B \end{array} \right.$$

$(x,z) \in A \times B$
נתון $A \times B = B \times A$

$\Rightarrow (x,z) \in B \times A \Rightarrow x \in B$
סתירה!

ב. מוכחים. בדומה למקרה א'.

הגדרה: תהיינה A ו- B קבוצות

$R \subseteq A \times B$

נקרא יחס בינארי (יחס בין שני רכיבים מתוך הזוג הסדור).

11.11.16 בס"ד

לוגיקה - תרגול

לוגיקה היא תורת ההגיון.

<u>תורת הפסוקים:</u>

<u>הגדרה</u>: פסוק הוא משפט פשוט שאפשר לקבוע האם הוא אמת או שקר.

<u>דוגמאות:</u>

1. היום יום שבת ← פסוק
2. מה השעה? ← לא פסוק

נסמן T - אמת, F - שקר

<u>קשרים לוגיים</u>

1. שלילה - סימון: $p^{\neg}$, $\sim p$, $\bar{p}$
2. וגם (ו' החיבור) - סימון: $p \wedge q$
3. או - סימון: $p \vee q$
4. משפט תנאי - גרירה - סימון: $p \to q$, אם ← אז
5. גרירה כפולה - סימון: $p \leftrightarrow q$, אם ורק אם

בס"ד

<u>תרגיל</u>

<u>א</u>. תרגמו באמצעות קשרים לוגיים את המשפטים הבאים

נתון: p – המשולש ABC שווה שוקיים T

q – המשולש ABC שווה צלעות T

r – המשולש ABC ישר זווית F

<u>1</u>. המשולש ABC לא משולש ישר זווית

<u>2</u>. אם המשולש ABC שווה צלעות אז המשולש ABC שווה שוקיים

<u>3</u>. המשולש ABC שווה שוקיים ולא ישר זווית

<u>4</u>. זה לא נכון שמשולש ABC שווה צלעות ולא ישר זווית

<u>ב</u>. נתון $p=T$, $r=T$, $q=F$

מצאו את ערך הפסוקים מסעיף א.

<u>פתרון</u>

א.

1. $\neg r$
2. $q \to p$
3. $p \wedge (\neg r)$
4. $\neg (q \wedge (\neg r))$

ב.

1. F $\quad \neg r = \neg T = F$
2. T $\quad q \to p = F \to T = T$
3. F $\quad p \wedge (\neg r) = T \wedge (\neg T) = T \wedge F = F$
4. T $\quad \neg (q \wedge (\neg r)) = \neg (F \wedge (\neg T)) = \neg (F \wedge F) = \neg F = T$

נוסף

תרגול:

מצאו את טבלת האמת של הפסוקים הבאים:

1. $((\neg p \lor q) \rightarrow (r \land p)) \land (p \rightarrow \neg r)$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	q	r	$\neg p$	$\neg p \lor q$	$r \land p$	$(\neg p \lor q) \rightarrow (r \land p)$	$\neg r$	$p \rightarrow \neg r$	$((\neg p \lor q) \rightarrow (r \land p)) \land (p \rightarrow \neg r)$
				$4 \lor 2$	$3 \land 1$	$5 \rightarrow 6$		$1 \rightarrow 8$	$7 \land 9$
T	T	T	F	T	T	T	F	F	F
T	T	F	F	T	F	F	T	T	F
T	F	T	F	F	T	T	F	F	F
T	F	F	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	T	F	F	T	T	F
F	F	T	T	T	F	F	F	T	F
F	F	F	T	T	F	F	T	T	F

2. $(\neg(p \rightarrow \neg q) \lor (\neg q \lor r)) \rightarrow (r \rightarrow \neg p)$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p	q	r	$\neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$\neg(p \rightarrow \neg q)$	$\neg q \lor r$	$\neg(p \rightarrow \neg q) \lor (\neg q \lor r)$	$\neg p$	$r \rightarrow \neg p$	$(\neg(p \rightarrow \neg q) \lor (\neg q \lor r)) \rightarrow (r \rightarrow \neg p)$
				$1 \rightarrow 4$	$\neg 5$	$4 \lor 3$	$6 \lor 7$		$3 \rightarrow 9$	$8 \rightarrow 10$
T	T	T	F	F	T	T	T	F	F	F
T	T	F	F	F	T	F	T	F	T	T
T	F	T	T	T	F	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	F	T	T	F	T	T
F	T	T	F	T	F	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	F	F	F	T	T	T
F	F	T	T	T	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	F	T	T	T	T	T

אם הכל F - קיימת סתירה

אם הכל T - קיימת טאוטולוגיה.

18.11.16

תרגול לוגיקה

משפט

יהיו A ו-B פסוקים, נאמר ש-A שקול ל-B אם ל-A ול-B יש את אותה טבלת האמת.
נסמן $A \equiv B$.

דוג: $p \to q \equiv \neg p \vee q$

הוכחה:

p	q	$p\to q$	$\neg p \vee q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

תרגולים:

1. הוכח $(p\to q) \underset{\text{בליעה}}{\vee} ((\neg p \vee q)\wedge q) = p \to q$

דרך 1:

$(p\to q) \vee q =$

$(\neg p \vee q) \vee q \overset{\text{קיבוץ}}{=}$

$\neg p \vee (q \vee q) \overset{\text{כינוס}}{=}$

$\neg p \vee q \overset{\text{זהות}}{=} p \to q$

דרך 2:

$(p\to q) \vee ((\neg p \vee q)\wedge q) \overset{\text{זהות}}{=}$

$(\neg p \vee q) \vee ((\neg p \vee q)\wedge q) \overset{\text{בליעה}}{=}$

$\neg p \vee q \overset{\text{זהות}}{=} p \to q$

2. הוכח $p \to (p \to ((p \vee \neg q) \to (p \wedge q))) = p \to q$

$p \to (p \to (\neg(p \vee \neg q) \vee (p \wedge q))) =$

$p \to (p \to ((\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q))) =$

$p \to (p \to q \wedge (\neg p \vee p)) =$

$p \to (p \to q \wedge T) =$

$p \to (p \to q) =$

$p \to (\neg p \vee q) =$

$\neg p \vee (\neg p \vee q) =$

$(\neg p \vee \neg p) \vee q =$

$\neg p \vee q =$

$(\neg p) \vee q) \overset{\text{זהות}}{=} p \to q$

לעשות – שיעורי בית עם כל.

נספח

3) פסוק
א

כל אות
מופיעה
לכל היותר
פעם אחת.

$$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow (q \vee r) \overset{\text{גרירה}}{=}$$

$$\neg((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \vee (q \vee r) \overset{\text{דה מורגן}}{=}$$

$$\neg(p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee r) \vee (q \vee r) \overset{\text{דה מורגן + שלילה כפולה}}{=}$$

$$((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)) \vee (q \vee r) \overset{\text{קיבוץ}}{=}$$

$$(((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)) \vee q) \vee r \overset{\text{קיבוץ}}{=}$$

$$((\neg p \wedge \neg q) \vee (q \vee (p \wedge \neg r))) \vee r \overset{\text{קיבוץ}}{=}$$

$$((\neg p \wedge \neg q) \vee q) \vee (p \wedge \neg r) \vee r \overset{\text{פילוג}}{=}$$

$$((\neg p \vee q) \wedge \underbrace{(\neg q \vee q)}_{T}) \vee ((p \vee r) \wedge \underbrace{(\neg r \vee r)}_{T}) =$$

$$((\neg p \vee q) \wedge T) \vee ((p \vee r) \wedge T) =$$

$$(\neg p \vee q) \vee (p \vee r) =$$

$$\neg p \vee q \vee p \vee r =$$

$$\underbrace{(\neg p \vee p)}_{T} \vee r \vee q =$$

$$T \vee (r \vee q) = T$$

צורות נורמליות של פסוקים - תרגול

נתון:

p	q	r	$f(p,q,r)$
T	T	T	F
T	T	F	F
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	F

dnf

מסתכלים על ערך T של $f(p,q,r)$ עבור כל ערך של T של $f(p,q,r)$ מסתכלים על המשתנים.
אם המשתנה הוא T מצרפים אותו.
אם המשתנה הוא F מצרפים את השלילה שלו.
בין המשתנים הקשר הוא וגם ($\wedge$).
בין ערכי T של $f(p,q,r)$ הקשר הוא או ($\vee$).

$$f(p,q,r)=(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)$$

cnf

מסתכלים על ערך F של $f(p,q,r)$. עבור כל ערך F של $f(p,q,r)$ מסתכלים על המשתנים.
אם המשתנה הוא F מצרפים אותו. אם המשתנה הוא T, מצרפים את השלילה שלו. בין המשתנים הקשר הוא ($\vee$).
בין ערכי F של $f(p,q,r)$ הקשר הוא וגם ($\wedge$).

$$f(p,q,r)=(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee q\vee r)$$

2.12.16 בס"ד

קבוצה

הגדרה: קבוצה היא אוסף של איברים מגוון סוגיים מסוימים.
נסמן קבוצה באות גדולה.

דוגמאות:

1. $A = \{1, 2, b, x, z\}$
2. $A = \{1, \{1,2\}, \{a\}\}$
3. $A = \{x \mid 2 \le x \le 5\}$
4. 1 לא קבוצה

הגדרה: נאמר a שייך לקבוצה A אם a הוא אחד מאיברי הקבוצה.
סימון $a \in A$ – a שייך ל-A.
$a \notin A$ – a לא שייך ל-A.

דוגמאות:

I $A = \{1,2,3\}$

$1 \in A$ $\quad 4 \notin A$

$2 \in A$

$3 \in A$

II $A = \{1, \{1,2\}, \{3\}\}$

$1 \in A$ $\quad \{1,2\} \in A$

$2 \notin A$ $\quad 3 \notin A$

$\{1\} \notin A$ $\quad \{3\} \in A$

$\{2\} \notin A$

הגדרה: קבוצה ריקה היא קבוצה בלי איברים, כלומר, אף איבר לא שייך לקבוצה הריקה.
סימון $\emptyset = \{\}$

תרגיל

קבע נכון או לא נכון

1. $\emptyset \in \{1,2,3\}$ לא
2. $\emptyset \in \{\emptyset,1,2,3\}$ כן
3. $\emptyset \in \{\{\emptyset\},1,2,3\}$ לא
4. $\{\emptyset\} \in \{\emptyset,1,2,3\}$ לא
5. $\{\emptyset,1\} \in \{\emptyset,1,2,3\}$ לא
6. $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\},1,2,3\}$ כן
7. $\{\emptyset,1\} \in \{\{\emptyset\},\{1\},2\}$ לא
8. $\{\emptyset,1\} \in \{\{\emptyset,1\},2\}$ [illegible]
9. $\{\{\emptyset\},\{1\}\} \in \{\{\emptyset,1\},2\}$ לא

הכלה

הגדרה: יהיו A ו-B קבוצות, נאמר שקבוצה B מוכלת בקבוצה A, אם כל $x\in B$ אז $x\in A$
ונסמן $B\subseteq A$

$B\not\subseteq A \Rightarrow$ B לא מוכל ב-A.

דוג'

1. $A=\{1,2,3\}$ $\quad B=\{1,3\}$

אז $B\subseteq A$
כי $1\in B \Rightarrow 1\in A$
$3\in B \Rightarrow 3\in A$

$A\not\subseteq B$ כי $2\in A \not\Rightarrow 2\in B$

$B\notin A$ וגם $A\not\subseteq B$

2. $A=\{1,2,\{1,2\}\}$ $\quad B=\{1,2\}$

$B\subseteq A$
כי $1\in B \Rightarrow 1\in A$
$2\in B \Rightarrow 2\in A$
$A\not\subseteq B$
כי $\{1,2\}\in A$ אבל $\{1,2\}\notin B$
$B\in A$

3. $A=\{1,\{2\}\}$ $\quad B=\{2\}$

$B\not\subseteq A$ כי $2\in B$ אבל $2\notin A$
$B\in A$

4. $A=\{1,\{2\}\}$ $\quad B=\{\{1\},2\}$

$B\not\subseteq A$ $\quad 2\in B$ אבל $2\notin A$
$B\notin A$

משפט:
לכל קבוצה A מתקיים $\emptyset\subseteq A$ (קבוצה ריקה מוכלת בכל קבוצה)

הוכחה:

$$\underbrace{\underbrace{x\in\emptyset}_{F} \underset{T}{\Rightarrow} \underbrace{x\in A}_{T/F}}_{T}$$

מסק

$\phi \in A$

⊆ כל איבר מאיברי הקבוצה מוכל

∈ כל התוכן,

תרגיל:

קבע נכון או לא נכון. נמק.

1. $\phi \in \{\phi, \{1,\phi\}\}$ כן

2. $\phi \subseteq \{\phi, \{1,\phi\}\}$ כן

3. $\{\phi\} \in \{\phi, \{1,\phi\}\}$ לא

4. $\{\phi\} \subseteq \{\phi, \{1,\phi\}\}$ כן

5. $\{1,\phi\} \in \{\phi, \{1,\phi\}\}$ כן

6. $\{1,\phi\} \subseteq \{\phi, \{1,\phi\}\}$ לא

7. $1 \subseteq \{\phi, \{1,\phi\}, 1\}$ לא כי 1 לא קבוצה הוא עצם.

8. $\{\{1\},\phi\} \in \{\phi, 1, \{\phi,1\}\}$ לא

9. $\{\{1\},\phi\} \subseteq \{\phi, 1, \{\phi,1\}\}$ לא

10. $\{\{1\},\phi\} \subseteq \{\phi, \{1\}, \{\phi,1\}\}$ כן

11. $\{\{1,\{1\}\}\} \in \{1, \{1\}, \{1,\{1\}\}\}$ לא

12. $\{\{1,\{1\}\}\} \subseteq \{1, \{1\}, \{1,\{1\}\}\}$ כן

13. $\{\{\phi\}\} \in \{\phi, \{\phi, \{\phi\}\}\}$ לא

14. $\{\{\phi\}\} \subseteq \{\phi, \{\phi, \{\phi\}\}\}$ לא

15. $\{\{\phi\}\} \subseteq \{\phi, \{\phi\}, \{\phi,\{\phi\}\}\}$ כן

9.12.16

$x\in A \leftrightarrow \{x\} \subseteq A$

בס"ד

תרגול

פעולות על קבוצות:

1. פעולת האיחוד:

נתון A ו-B קבוצות

נסמן $A\cup B$ איחוד A עם B

$$A\cup B = \{x \mid x\in A \text{ או } x\in B\}$$

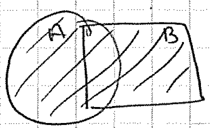
$$x\in B \text{ או } x\in A \iff x\in A\cup B$$

דוג':

① $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,4,5\}$, $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$

② $A=\{1,\{2\}\}$, $B=\{\{1\},2\}$, $A\cup B=\{1,\{2\},\{1\},2\}$

③ $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,3\}$, $B\subseteq A$, $A\cup B=A$

④ 

$A\cup B$

תכונות של איחוד:

1) $x\in B$ או $x\in A \Leftarrow x\in A\cup B$

2) $A\subseteq A\cup B$

3) $B\subseteq A\cup B$

4) $x\in A\cup B \leftarrow x\in A$

5) $x\in A\cup B \leftarrow x\in B$

6) $A\cup\emptyset = A$ מקרה פרטי של 7.

7) אם $B\subseteq A$ אז $A\cup B=A$

8) $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$

9) $A\cup B = B\cup A$

פסק״

2) חיתוך של קבוצות

נתון A ו- B קבוצות
סימון $A \cap B$ חיתוך

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ וגם } x\in B\}$$

כל האיברים המשותפים ל- A ו- B.

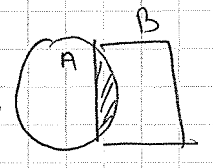
דוגמאות:

1) $A=\{1,2,3\}$
$B=\{3,4,5\}$
$A\cap B=\{3\}$

2) $A=\{1,\{2\}\}$
$B=\{\{1\},2\}$
$A\cap B=\emptyset$ ← אם החיתוך ריק, הק׳ נקראות זרות

3) $A=\{1,2,3\}$
$B=\{1,3\}$
$A\cap B=B$ ← $B\subseteq A$

4) $A\cap B$



תכונות של איחוד וחיתוך.

1) $x\in A\cap B$ ← $x\in A$ וגם $x\in B$
2) $x\in A\cap B$ ← $x\in A$
3) $x\in A\cap B$ ← $x\in B$
4) $A\cap B\subseteq A$
5) $A\cap B\subseteq B$
6) $A\cap B\subseteq A\cup B$
7) $x\in A\cap B$ ← $x\in A\cup B$
8) $A\cap B=B\cap A$
9) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
10) פילוג $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
11) $A\cap\emptyset=\emptyset$
12) אם $B\subseteq A$ אז $A\cap B=B$

בס"ד

3. הפרש של קבוצות.

נתון A ו- B קבוצות

$$A-B = A\setminus B = \{x\in A \mid x\in B\} \subseteq A$$

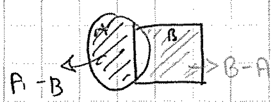
דוגמאות:

① $A=\{1,2,3\}$
$B=\{3,4,5\}$
$A\setminus B=\{1,2\}$
$B\setminus A=\{4,5\}$
$A-B\neq B-A$

② $A=\{1,\{2\}\}$
$B=\{\{1\},2\}$
$A\setminus B=A$
$B\setminus A=B$

③ $A=\{1,2,3\}$
$B=\{1,3\}$ $\quad B\subseteq A$
$A\setminus B=\{2\}$
$B-A=\emptyset$

④



תכונות של הפרש:

1. $x\in A-B \Rightarrow x\notin B$ וגם $x\in A$
2. $x\in A-B \Rightarrow x\in A$
3. $A-B\subseteq A$
4. $x\in A$ וגם $x\notin B \Rightarrow x\in A-B$
5. $A-\emptyset=A$
6. $\emptyset-A=\emptyset$
7. אם $B\subseteq A$ אז $B-A=\emptyset$
8. $x\in A\cap B \Rightarrow x\notin A-B$
9. $x\in A-B \Rightarrow x\notin A\cap B$

קספ

4. משלים של קבוצה

נתון U עולם

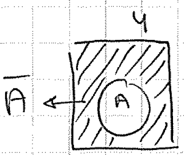
נתון A קבוצה מעולם $\leftarrow$ $A\subseteq U$

המשלים של A יסומן ב- $\bar{A}$ כך ש-

$\bar{A}$ $\{x\in U \mid x\notin A\}=U-A$

דוגמאות:

$U=\{1,2,3,4,5\}$



① $A=\{2,3,5\}$
$\bar{A}=\{1,4\}$

② $A=\{1,4\}$
$\bar{A}=\{2,3,5\}$

③ $A=\emptyset$
$\bar{A}=U$

④ $A=U$
$\bar{A}=\emptyset$

תכונות של

1. $A\cup\bar{A}=U$
2. $A\cap\bar{A}$ — אין חיתוך, אין איברים משותפים ל-A ולמשלימו.
3. תמיד $x\in A\cup\bar{A} \Rightarrow x\in A$ או $x\in\bar{A}$
4. $\bar{\bar{A}}=A$
5. דה מורגן
$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$
$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$

דוגמה:

$u=\{1,2,3,4,5\}$

$\bar{A}=\{4,5\} \leftarrow A=\{1,2,3\}$

$\bar{B}=\{3,4\} \leftarrow B=\{1,2,5\}$

$\overline{A\cap B}=\{3,4,5\} \leftarrow A\cap B=\{1,2\}$

$\bar{A}\cup\bar{B}=\{3,4,5\}$

$\Downarrow$

$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

$\overline{A\cup B}=\{4\} \leftarrow A\cup B=\{1,2,3,5\}$

$\bar{A}\cap\bar{B}=\{4\}$

$\Downarrow$

$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$

6. $\bar{\emptyset}=U$
7. $\bar{U}=\emptyset$
8. $A\cap U=A$ (כי $A\subseteq U$).
9. $A\cup U=U$ (כי $A\subseteq U$).
10. $\bar{A}=U-A$
11. $A-U=\emptyset$ (אין איבר ב-A שלא קיים בעולם).
12. $A-\bar{A}=A$ (אין איבר ב-A שקיים ב-$\bar{A}$)
13. $\bar{A}-A=\bar{A}$ (אין איבר ב-$\bar{A}$ שקיים ב-A)
14. $A-B=A\cap\bar{B}$ כגון: * [illegible]

$U=\{1,2,3,4,5\}$
$A=\{1,3,5\}$
$B=\{2,3,5\} \rightarrow \bar{B}=\{1,4\}$
$A-B=\{1\}$
$A\cap\bar{B}=\{1\}$ $\Rightarrow A-B=A\cap\bar{B}$

16-12-16 פסק

הוכחות

הוכח או סתור

1. $A-(A\cap B)=A-B$

פתרון:

$$A-(A\cap B)\overset{\text{הגדרה}}{=}A\cap\overline{(A\cap B)}=A\cap(\bar{A}\cup\bar{B})\overset{\text{פילוג}}{=}$$

$$(A\cap\bar{A})\cup(A\cap\bar{B})=\emptyset\cup(A\cap\bar{B})=A\cap\bar{B}=A-B$$

2. $(A\cap\bar{B})\cup(A\cap B)=A$

$$(A\cap\bar{B})\cup(A\cap B)\overset{\text{פילוג}}{=}A\cap(\bar{B}\cup B)=A\cap U=A$$

3. $(A-B)\cup B=A$

$$(A-B)\cup B\overset{\text{הגדרה}}{=}(A\cap\bar{B})\cup B\overset{\text{פילוג}}{=}(A\cup B)\cap(\bar{B}\cup B)=$$

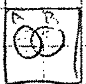
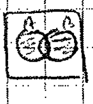
$$(A\cup B)\cap U=A\cup B$$

דוגמא נגדית: [illegible]

$A=\{1\}\quad B=\{2\}$

$$(A-B)\cup B=(\{1\}-\{2\})\cup\{2\}=$$

$$\{1\}\cup\{2\}=\{1,2\}\neq A$$

4.  $(A\cup B)-(A\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$ 

$$(A\cup B)-(A\cap B)\overset{\text{הגדרה}}{=}$$
$$(A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)}\overset{\text{דה מורגן}}{=}$$
$$(A\cup B)\cap(\bar{A}\cup\bar{B})= \quad \text{פילוג}$$
$$((A\cup B)\cap\bar{A})\cup((A\cup B)\cap\bar{B})= \quad \text{פילוג}$$
$$((A\cap\bar{A})\cup(\bar{A}\cap B))\cup((A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{B}))=$$
$$(\emptyset\cup(\bar{A}\cap B))\cup((A\cap\bar{B})\cup\emptyset)=$$
$$(\bar{A}\cap B)\cup(A\cap\bar{B})= \quad \text{הגדרה}$$
$$(B-A)\cup(A-B) \quad \text{מ.ש.ל.}$$

5. $(A\cup B)-B=A$

$$(A\cup B)-B\overset{\text{הגדרה}}{=}(A\cup B)\cap\bar{B}\overset{\text{פילוג}}{=}(A\cap\bar{B})\cup\underbrace{(B\cap\bar{B})}_{\emptyset}=A\cap\bar{B}\overset{\text{הגדרה}}{=}A-B$$

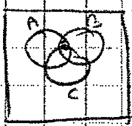
דוגמא נגדית:

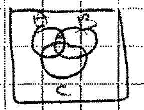
$A=\{1,2\}\quad B=\{2\}$

$A\cup B=\{1,2\}$

$(A\cup B)-B=\{1\}\neq A$

המשך



$\Leftarrow \quad A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$  .6

$(A\cap B)-(A\cap C) \overset{\text{הפרש}}{=} (A\cap B)\cap(\overline{A\cap C}) \overset{\text{דה מורגן}}{=}$

$(A\cap B)\cap(\bar A\cup\bar C) \overset{\text{פילוג}}{=} ((A\cap B)\cap\bar A)\cup((A\cap B)\cap\bar C)=$

$\emptyset\cup((A\cap B)\cap\bar C) \overset{\text{קיבוץ}}{=} (A\cap B)\cap\bar C$

$A\cap(B\cap\bar C) \overset{\text{הפרש}}{=} A\cap(B-C)$ מ.ש.ל.

<u>משפט:</u>

יהיו A ו-B קבוצות.

$A=B \iff A\subseteq B$ וגם $B\subseteq A$

<u>תרגיל</u>

הוכח $A-B=A\cap\bar B$

הוכחה: צ"ל I $A-B\subseteq A\cap\bar B$

II $A\cap\bar B\subseteq A-B$

I יהי $x\in A-B$ צ"ל $x\in A\cap\bar B$

$x\in A-B \overset{\text{הפרש}}{\Rightarrow} x\in A$ וגם $x\notin B \overset{\text{משלים}}{\Rightarrow} x\in A$ וגם $x\in\bar B \overset{\text{חיתוך}}{\Rightarrow}$

$x\in A\cap\bar B$

II יהי: $x\in A\cap\bar B$ צ"ל $x\in A-B$

$x\in A\cap\bar B \overset{\text{חיתוך}}{\Rightarrow} x\in A$ וגם $x\in\bar B \overset{\text{משלים}}{\Rightarrow} x\in A$ וגם $x\notin B \overset{\text{הפרש}}{\Rightarrow}$

$x\in A-B$

תרגיל - הוכח או הפרך

<u>1</u>. אם $A\cup B=A$ אזי $B\subseteq A$

יהי (1) $A\cup B=A$, צ"ל $B\subseteq A$

יהי (2) $x\in B$ צ"ל $x\in A$

נתחיל מנתון 2: $x\in B \Rightarrow x\in A\cap B \underset{(A\cup B)=A}{\overset{\text{לפי נתון 1}}{\Rightarrow}} x\in A$ מ.ש.ל.

<u>2</u>. אם $A\cap B=\emptyset$ אזי $A\in\bar B$

יהי (1) $A\cap B=\emptyset$ צ"ל $A\subseteq\bar B$

יהי (2) $x\in A$, צ"ל $x\in\bar B$

נתחיל מנתון 2: $x\in A \Rightarrow x\in A$ וגם $x\in U \Rightarrow x\in A$ וגם $x\in B\cup\bar B \Rightarrow$

$x\in A$ וגם ($x\in B$ או $x\in\bar B$) $\Rightarrow$

($x\in A$ וגם $x\in B$) או ($x\in A$ וגם $x\in\bar B$) $\Rightarrow$

$x\in A\cap B$ או $x\in A\cap\bar B \underset{A\cap B=\emptyset}{\overset{\text{נתון 1}}{\Rightarrow}} x\in\emptyset$ או $x\in A\cap\bar B \Rightarrow$

$x\in A\cap\bar B \Rightarrow x\in\bar B$

סעיף

3. אם $A\cup B=U$ אז $A=\bar{B}$

דוגמא נגדית: עולם $\{1,2\}$

$A=\{1\}$

$B=\{1,2\}$

$A\cup B=\{1,2\}$

$\{1\}\quad A\neq\bar{B}\quad\{\emptyset\}$

[illegible]

הוכחה:

נתון ① $A\cup B=U$, צ"ל $A=\bar{B}$

צ"ל I $A\subseteq\bar{B}$

II $\bar{B}\subseteq A$

I נתון (2) $x\in A$ צ"ל $x\in\bar{B}$

נתון (2) $x\in A \Leftarrow x\in A$ וגם $x\in U \Leftarrow x\in A$ וגם $x\in B\cup\bar{B} \Leftarrow$

$x\in A$ וגם ($x\in B$ או $x\in\bar{B}$) $\xLeftarrow{\text{פילוג}}$ ($x\in A$ וגם $x\in B$) או ($x\in A$ וגם $x\in\bar{B}$) $\Leftarrow$

$x\in A\cap B$ או $x\in A\cap\bar{B}$

נתון $A\cup B=U$ לכן אפשר לומר כי אין להם חיתוך משותף

דוגמא:

$U=\{1,2,3\}$

$A=\{1,2\}$

$B=\{2,3\}$ $\rightarrow$ $A\cup B=U$, $\bar{B}=1\neq A$

4. אם $A\cup B=U$ אז $\bar{B}\subseteq A$

הוכחה:

נתון (1) $A\cup B=U$ צ"ל $\bar{B}\subseteq A$

נתון (2) $x\in\bar{B}$ צ"ל $x\in A$

נתון 2 $x\in\bar{B} \Leftarrow x\in\bar{B}$ וגם $x\in U \xLeftarrow{A\cup B=U \text{ נתון 1}} x\in\bar{B}$ וגם $x\in A\cup B \Leftarrow$

$x\in\bar{B}$ וגם ($x\in B$ או $x\in A$) $\xLeftarrow{\text{פילוג}}$ ($x\in\bar{B}$ וגם $x\in B$) או ($x\in\bar{B}$ וגם $x\in A$) $\Leftarrow$

$\underbrace{x\in\bar{B}\cap B}_{\emptyset}$ או $x\in\bar{B}\cap A \leftarrow \underbrace{\emptyset}_{F}$ או $x\in\bar{B}\cap A \Leftarrow x\in A\cap\bar{B} \Leftarrow$

$x\in A$ מ.ש.ל.

23.12.16 בס"ד

תרגול עם רותן ☺

הוכח או סתור ע"י דוגמה נגדית

ג. אם $A-B=A$ אז $B=\emptyset$

<u>פתרון</u>

נתון $A-B=A$
צ"ל $B=\emptyset$

לא פעם שואלים
שוויון ל-$\emptyset$ מוכיחים
בדרך השלילה.

נניח בשלילה: $B\neq\emptyset$
קיים $x\in B$

$$x\in B \Rightarrow x\notin \overline{B} \Rightarrow x\notin A\cap\overline{B} \Rightarrow x\notin A-B \xRightarrow{A-B=A \text{ נתון}} x\notin A$$

לא הצלחנו לקבל סתירה לכן נביא דוגמה נגדית
דוגמה נגדית:

$A=\{1\}$
$B=\{2\}\neq\emptyset$
$A-B=A$

יד. אם $B-C=B$ אז $B\cap C=\emptyset$

נתון: $B-C=B$ צ"ל $B\cap C=\emptyset$
נניח בשלילה $B\cap C\neq 0$

$$B\cap C\neq\emptyset \Rightarrow \text{קיים } x\in B\cap C \Rightarrow x\in B \wedge x\in C \xRightarrow{\text{נתון } B=B-C}$$

$$x\in B-C \wedge x\in C \Rightarrow \underbrace{x\in C \wedge x\notin C}_{\text{סתירה}} \wedge x\in B$$

ל מ $B\cap C=\emptyset$

טו. $(A\cap B\subseteq C) \leftrightarrow (A\subseteq \overline{B}\cup C)$

<u>פתרון:</u> $(\Leftarrow)$ נתון (1) $A\subseteq\overline{B}\cup C$, צ"ל: $A\cap B\subseteq C$
נתון (2) $x\in A\cap B$ צ"ל $x\in C$

$$x\in A\cap B \xrightarrow{\text{נתון (2)}} x\in A \wedge x\in B \xrightarrow{\text{נתון 1}} A\subseteq\overline{B}\cup C \wedge x\in B \rightarrow$$

$$(x\in C \vee x\in\overline{B}) \wedge x\in B \xrightarrow{\text{פילוג}} (x\in C \wedge x\in B) \vee (x\in\overline{B} \wedge x\in B) \rightarrow$$

$$(x\in B\cap C) \vee \overbrace{(x\in B\cap\overline{B})}^{\emptyset} \rightarrow x\in B\cap C \text{ או } \underbrace{x\in\emptyset}_{F} \rightarrow$$

$$x\in B\cap C \rightarrow x\in C$$

$\leftarrow$

המשך

(→) נניח (1) $A\cap B\subseteq C$ צ"ל $A\subseteq \bar{B}\cup C$

נניח (2) $x\in A$ צ"ל $x\in \bar{B}\cup C$

נניח 2

$x\in A \rightarrow x\in A \wedge x\in U \rightarrow x\in A \wedge x\in \bar{B}\cup B \rightarrow$

$x\in A$ וגם $(x\in B$ או $x\in \bar{B}) \xrightarrow{\text{פילוג}} (x\in A$ וגם $x\in B)$ או $(x\in A$ וגם $x\in \bar{B}) \rightarrow$

$(x\in A\cap B)$ או $(x\in A\cap \bar{B}) \xrightarrow[A\cap B\subseteq C]{\wedge \text{ נניח}} x\in C$ או $x\in A\cap \bar{B} \rightarrow$

$x\in C$ או $x\in \bar{B} \rightarrow x\in \bar{B}\cup C$

3. $((A\cap B)\cup C = A\cap(B\cup C)) \leftrightarrow (C\subseteq A)$

פתרון:

(←) נניח (1) $C\subseteq A$ צ"ל $(A\cap B)\cup C = A\cap(B\cup C)$

צ"ל I $(A\cap B)\cup C \subseteq A\cap(B\cup C)$

II $A\cap(B\cup C)\subseteq (A\cap B)\cup C$

I נניח (2) $x\in(A\cap B)\cup C$ צ"ל $x\in A\cap(B\cup C)$

נניח 2

$x\in (A\cap B)\cup C \rightarrow x\in C$ או $x\in A\cap B \rightarrow$

$x\in C$ או $(x\in A$ וגם $x\in B) \xrightarrow{\text{פילוג}} (x\in C$ או $x\in A)$ וגם $(x\in C$ או $x\in B) \rightarrow$

$\overset{\wedge \text{ נניח}}{C\subseteq A} \rightarrow (x\in A$ או $x\in A)$ וגם $(x\in C$ או $x\in B) \rightarrow$

$x\in A$ וגם $(x\in B\cup C) \rightarrow x\in A\cap(B\cup C)$

II נניח (3) $x\in A\cap(B\cup C)$ צ"ל $x\in(A\cap B)\cup C$

נניח 3

$x\in A\cap(B\cup C) \rightarrow x\in A$ וגם $(x\in B\cup C) \rightarrow x\in A$ וגם $(x\in B$ או $x\in C) \xrightarrow{\text{פילוג}}$

$(x\in A$ וגם $x\in B)$ או $(x\in A$ וגם $x\in C) \rightarrow \overset{\text{נניח } 1}{C\subseteq A} \rightarrow$

$(x\in A$ וגם $x\in B)$ או $(x\in C$ וגם $x\in C) \rightarrow$

$(x\in A$ וגם $x\in B)$ או $(x\in C) \rightarrow x\in C$ או $(x\in A\cap B) \rightarrow$

$x\in C\cup(A\cap B)$

(→) נניח (1) $(A\cap B)\cup C = A\cap(B\cup C)$ צ"ל $C\subseteq A$

נניח (2) $x\in C$ צ"ל $x\in A$

נניח 2

$x\in C \rightarrow x\in \overbrace{(A\cap B)}^{\text{מוסיפים כל מה שנרצה [illegible]}}\cup C \xrightarrow[(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)]{\wedge \text{ נניח}} x\in A\cap(B\cup C) \rightarrow x\in A$

ח״ס

$B=\bar{A} \longleftrightarrow A\cap B=\emptyset \ \wedge \ A\cup B=U$.ח

$B=\bar{A}$:צ״ל $\quad$ (1) $A\cup B=U$:הנחה $(\leftarrow)$

(2) $A\cap B=\emptyset$

$B\subseteq\bar{A}$ $\quad$ I :צ״ל

$\bar{A}\subseteq B$ $\quad$ II

$x\in\bar{A}$ צ״ל $\quad x\in B$ (3) הנחה I

3 הנחה

$x\in B \rightarrow x\in B$ וגם $x\in U \rightarrow x\in B$ וגם $x\in A\cup\bar{A} \longrightarrow$

$x\in B$ וגם $(x\in A$ או $x\in\bar{A}) \xrightarrow{\text{פילוג}} (x\in B$ וגם $x\in A)$ או $(x\in B$ וגם $x\in\bar{A}) \rightarrow$

$(x\in B\cap A)$ או $(x\in B\cap\bar{A}) \xrightarrow[A\cap B=\emptyset]{2\ \text{הנחה}} \emptyset$ או $x\in B\cap\bar{A} \rightarrow$

$x\in\bar{A}\cap B \rightarrow x\in\bar{A}$

$x\in B$ צ״ל $\quad x\in\bar{A}$ (4) הנחה II

4 הנחה

$x\in\bar{A} \rightarrow x\in A$ וגם $x\in U \xrightarrow[\text{פילוג}]{1\ \text{הנחה}\ A\cup B=U} x\in\bar{A}$ וגם $x\in A\cup B \rightarrow$

$x\in\bar{A}$ וגם $(x\in A$ או $x\in B)$

$(x\in\bar{A}$ וגם $x\in A)$ או $(x\in\bar{A}$ וגם $x\in B) \longrightarrow$

$(x\in\bar{A}\cap A)$ או $(x\in\bar{A}\cap B) \longrightarrow \emptyset$ או $(x\in\bar{A}\cap B) \rightarrow$

$x\in\bar{A}\cap B \rightarrow x\in B$

$A\cup B=U$ ① צ״ל $\quad B=\bar{A}$ (3) הנחה $(\longrightarrow)$

$A\cap B=\emptyset$ ②

מספר הנחה = אותו מספור בהוכחה.

$B=\bar{A}$ הנחה

1) $A\cup B = A\cup\bar{A} = U$

2) $A\cup B \underset{B=\bar{A}\ \text{הנחה}}{=} A\cap\bar{A}=\emptyset$

6.1.17 מסקנה

תרגול עם רעות ⑪

קבוצת החזקה:

הגדרה: תהי A קבוצה.
קבוצת החזקה של A היא אוסף כל הקבוצות המוכלות ב- A.
נסמן $P(A)$ או 2^A

$$P(A)=\{B \mid B\subseteq A\}$$

דוג':

1. $A=\{1\}$
   $P(A)=\{\phi,\{1\}\}$
2. $A=\{1,2\}$
   $P(A)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$
3. $A=\phi$
   $P(A)=\{\phi\}$
4. $A=\{\{\phi\}\}$
   $P(A)=\{\phi,\{\phi\}\}$

תכונות של קב' החזקה

1) $B\in P(A) \leftrightarrow B\subseteq A$

דוגמה:

1. $A=\{1,2\}$
   $\{1\}\in P(A) \Leftrightarrow \{1\}\subseteq A$
2. $\phi\in P(A)$ (כי $\phi\subseteq A$)
3. $P(A)\neq\phi$ (כי $\phi\in P(A)$)
4. $A\in P(A)$ (כי $A\subseteq A$)
5. אם ב- A יש n איברים אזי ב- $P(A)$ יש 2^n איברים
6. $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$
7. $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$

המשך

תרגיל:

הוכח: $P(A)\subseteq P(B) \iff A\subseteq B$

הוכחה: $(\Leftarrow)$ נתון (1) $P(A)\subseteq P(B)$
צ"ל $A\subseteq B$

דרך ראשונה: נתון (2) $x\in A$ צ"ל $x\in B$

$$x\in A \xrightarrow{\text{נתון (2)}} \{x\}\subseteq A \xrightarrow{\text{טענה 1}} \{x\}\in P(A) \xrightarrow{\text{נתון 1}} \{x\}\in P(B) \xrightarrow{\text{טענה 1}}$$

$$\{x\}\subseteq B \rightarrow x\in\{x\}\subseteq B \rightarrow x\in B$$

דרך שניה:

$$A\in P(A) \xrightarrow{\text{נתון 1}} A\in P(B) \xrightarrow{\text{טענה 1}} A\subseteq B$$

טענה 4

$(\Rightarrow)$ נתון (1) $A\subseteq B$ צ"ל: $P(A)\subseteq P(B)$

נתון (2) $S\in P(A)$ צ"ל $S\in P(B)$

$$S\in P(A) \xrightarrow{\text{טענה 1}} S\subseteq A \xrightarrow[\text{נתון 1}]{\text{טענת עזר}} S\subseteq B \xrightarrow{\text{טענה 1}} S\in P(B)$$

נתון 2

טענת עזר: אם $S\subseteq A$ וגם $A\subseteq B$ אז $S\subseteq B$

הוכחת הטענה:

נתון (1) $S\subseteq A$ צ"ל $S\subseteq B$

נתון (2) $A\subseteq B$

נתון (3) $x\in S$ צ"ל $x\in B$

$$x\in S \xrightarrow{\text{נתון (1)}} x\in A \xrightarrow{\text{נתון (2)}} x\in B$$

נתון (3)

תרגיל:

נתון $A=\{1,2\}$
$B=\{2,3\}$

חשב $P(A)$, $P(B)$, $P(A\cup B)$, $P(A-B)$, $P(A)-P(B)$, $P(A)\cup P(B)$

$P(A)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$
$P(B)=\{\phi,\{2\},\{3\},\{2,3\}\}$
$P(A\cup B)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$
$P(A-B)=P(\{1\})=\{\phi,\{1\}\}$
$P(A)-P(B)=\{\{1\},\{1,2\}\}$
$P(A)\cup P(B)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\},\{3\},\{2,3\}\}$

$P(A)\cup P(B)\neq P(A\cup B)$
$P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$

סכ"ם

* תרגיל:

הוכח $P(A-B) \subseteq (P(A)-P(B)) \cup \{\emptyset\}$

הוכחה:

נתון $S \in P(A-B)$ צ"ל $S \in (P(A)-P(B)) \cup \{\emptyset\}$

→ מקרה ראשון

$S=\emptyset$

$$\emptyset = S \in P(A-B) \to S=\emptyset \in \{\emptyset\} \to S=\emptyset \in (P(A)-P(B)) \cup \{\emptyset\}$$

→ מקרה שני

$S\neq\emptyset$ כך ש- $\emptyset \neq S \in P(A-B)$

$$0 \neq S \in P(A-B) \xrightarrow{\text{טענה 1}} \emptyset\neq S\subseteq A-B \xrightarrow{\text{לפי הגדרת הפרש}} \emptyset \neq S \subseteq A \text{ וגם } \emptyset\neq S \not\subseteq B \xrightarrow{\text{טענה 1}}$$
$$\emptyset\neq S\in P(A) \text{ וגם } \emptyset \neq S\notin P(B) \xrightarrow{\text{הגדרה}} \emptyset\neq S\in P(A)-P(B) \to$$
$$\emptyset \neq S \in (P(A)-P(B)) \cup \emptyset$$

טענת עזר:

אם $\emptyset\neq S\subseteq A-B$

אז $\emptyset\neq S\subseteq A$ וגם $\emptyset \neq S\not\subseteq B$

הוכחת טענת העזר:

נתון: (1) $\emptyset\neq S\subseteq A-B$

צ"ל 1. $\emptyset\neq S\subseteq A$

2. $\emptyset\neq S\subseteq B$

נתון (2) $S\neq\emptyset \Rightarrow x\in S$

צ"ל (I) $x\in A$

(I) $x\in B$

$$\overset{\text{נתון 2}}{x\in S} \xrightarrow{\text{נתון 1}} x\in A-B \longrightarrow x\in A \text{ וגם } x\notin B$$

* תרגיל:

נתון $U=\{1,2,3\}$

$A=\{1\}$ $\quad P(A)=\{\emptyset,\{1\}\}$

מצא $P(U)$, $P(\overline{A})$, $\overline{P(A)}=P(U)-P(A)$

$$P(U)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$$
$$P(\overline{A}) = P\{2,3\} = \{\emptyset,\{2\},\{3\},\{2,3\}\}$$
$$\overline{P(A)} = P(U)-P(A) = \{\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$$

$\overline{P(A)}$ הוא לא קב' חזקה!

- אין לה ריק
- אין לה 2^n איברים.

פס"ס

הוכח במבחן!

⊛ **תרגיל:**

הוכח: $P(\bar{A}) \subseteq \overline{P(A)} \cup \{\emptyset\}$ ← מופיע בשיעורי הבית!

* **תרגיל:**

הוכח: $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B) \leftrightarrow A \subseteq B$ או $B \subseteq A$

הוכחה:

($\Leftarrow$) נתון $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$

צ"ל $A \subseteq B$ או $B \subseteq A$

דרך 1:

נניח בשלילה ש $A \nsubseteq B$ וגם $B \nsubseteq A$

$A \nsubseteq B \rightarrow$ קיים $a \in A$ כך ש $a \notin B \rightarrow a \in A \cup B$

$B \nsubseteq A \rightarrow$ קיים $b \in B$ כך ש- $b \notin B \rightarrow b \in B \cup A$

$\rightarrow$

$\{a,b\} \subseteq A \cup B \rightarrow \{a,b\} \in P(A \cup B) \xrightarrow{\text{נתון}}$

$\{a,b\} \in P(A) \cup P(B) \xrightarrow{\text{תכונה}} \{a,b\} \in P(A)$ או $\{a,b\} \in P(B) \xrightarrow{\text{תכונה 1}}$

$\{a,b\} \subseteq A$ או $\{a,b\} \subseteq B \rightarrow b \in A$ או $a \in B$

סתירה $b \notin A$ וגם $a \notin B$

לכן $A \subseteq B$ או $B \subseteq A$

דרך 2

$A \cup B \in P(A \cup B) \xrightarrow{\text{תכונה 4}} \xrightarrow{\text{נתון}} A \cup B \in P(A) \cup P(B) \rightarrow$

$A \cup B \in P(A)$ או $A \cup B \in P(B) \xrightarrow{\text{תכונה 1}} A \cup B \subseteq A$ או $A \cup B \subseteq B \rightarrow$

$\underset{\text{תכונה 3 נתון}}{B \subseteq A \cup B \subseteq A}$ או $\underset{\text{תכונה 3 נתון}}{A \subseteq A \cup B \subseteq B} \xrightarrow[\text{היום}]{\text{טרנזיטיביות מהוכחה 1}} A \subseteq B$ או $B \subseteq A$

($\rightarrow$) נתון $A \subseteq B$ או $B \subseteq A$

צ"ל $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

אם

$A \subseteq B \rightarrow A \cup B = B \rightarrow P(A \cup B) = P(B)$

הוכחנו בתרגיל 1 היום $\searrow P(A) \subseteq P(B) \rightarrow P(A) \cup P(B) = P(B)$

$\rightarrow$

$P(A \cup B) = P(B) = P(A) \cup P(B)$

אם

$B \subseteq A \rightarrow A \cup B = A \rightarrow P(A \cup B) = P(A)$

$\searrow P(B) \subseteq P(A) \rightarrow P(A) \cup P(B) = P(A)$

$\rightarrow$

$P(A \cup B) = P(A) = P(A) \cup P(B)$

העזו עם רצון!

מכפלה קרטזית -

<u>הגדרה</u>: יהיו $A\neq\phi$ ו- $B\neq\phi$
זוג סדור (הוא) (a,b) כך ש- $a\in A$ וגם $b\in B$
עם חשיבות לסדר.

דוג' : $A=\{1,2,3\}$ $B=\{a,b\}$

זוגות: $(1,a)$ $(2,b)$ $(3,a)$

<u>הגדרה</u>: יהיו A ו- B קבוצות
המכפלה הקרטזית היא:

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A \text{ וגם } b\in B\}$$

כלומר כל הזוגות הסדורים.

דוג' : $A=\{1,2,3\}$ $B=\{a,b\}$

$$A\times B=\{(1,a),(2,a),(3,a),(1,b),(2,b),(3,b)\}$$

$$B\times A=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$

$$A^2=A\times A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

מישור $=R^2=R\times R$

<u>תכונות מכפלה קרטזית</u>:

1. $(a,b)\in A\times B \leftrightarrow a\in A$ וגם $b\in B$
2. $(a,b)\notin A\times B \leftrightarrow a\notin A$ או $b\notin B$
3. אם $a\notin A \leftarrow (a,b)\notin A\times B$
4. אם $b\notin B \leftarrow (a,b)\notin A\times B$
5. אם U העולם של $A+B$ אז $U\times U$ העולם של $A\times B$

<u>תרגיל</u>: הוכח או סתור ע״י דוג' נגדית

1. $(A\times B)\cup(A\times C) = A\times(B\cup C)$

<u>פתרון</u>:

צ״ל I $A\times(B\cup C)\subseteq(A\times B)\cup(A\times C)$

II $(A\times B)\cup(A\times C)\subseteq A\times(B\cup C)$

I נניח $(x,y)\in A\times(B\cup C)$ צ״ל: $(x,y)\in(A\times B)\cup(A\times C)$

$\overset{\text{נתון}}{(x,y)\in A\times(B\cup C)} \xrightarrow{\text{תכונה } 1} x\in A$ וגם $y\in B\cup C \rightarrow x\in A$ וגם $(y\in B$ או $y\in C) \xrightarrow{\text{פילוג}}$

$(x\in A$ וגם $y\in B)$ או $(x\in A$ וגם $y\in C) \rightarrow (x,y)\in A\times B$ או $(x,y)\in(A\times C) \xrightarrow{\text{איחוד}}$

$(x,y)\in(A\times B)\cup(A\times C)$

II נניח $(x,y)\in(A\times B)\cup(A\times C)$ צ״ל $(x,y)\in A\times(B\cup C)$

$\overset{\text{נתון}}{(x,y)\in(A\times B)\cup(A\times C)} \xrightarrow{\text{איחוד}} (x,y)\in A\times B$ או $(x,y)\in A\times C \xrightarrow{\text{תכונה } 1}$

$(x\in A$ וגם $y\in B)$ או $(x\in A$ וגם $y\in C) \xrightarrow{\text{פילוג}}$

$x\in A$ וגם $(y\in B$ או $y\in C) \rightarrow x\in A$ וגם $y\in B\cup C \xrightarrow{\text{תכונה}}$

$(x,y)\in A\times(B\cup C)$

סמ״ס

2. הוכח או סתור ע״י דוגמא נגדית:

$$(A\times B)\cup(C\times D)=(A\cup C)\times(B\cup D)$$

I צ״ל $(A\times B)\cup(C\times D)\subseteq(A\cup C)\times(B\cup D)$

II צ״ל $(A\cup C)\times(B\cup D)\subseteq(A\times B)\cup(C\times D)$

I יהי $(x,y)\in(A\times B)\cup(C\times D)$ צ״ל $(x,y)\in(A\cup C)\times(B\cup D)$

$(x,y)\in(A\times B)\cup(C\times D)\rightarrow(x,y)\in(A\times B)$ או $(x,y)\in(C\times D)\rightarrow$

$(x\in A$ וגם $y\in B)$ או $(x\in C$ וגם $y\in D)\rightarrow$

$x\in A$ או C וגם $y\in B$ או $D\rightarrow$

$x\in A\cup C$ וגם $y\in B\cup D\rightarrow x\in(A\cup C)\times(B\cup D)$

II יהי $(x,y)\in(A\cup C)\times(B\cup D)$ צ״ל $(x,y)\in(A\times B)\cup(C\times D)$

$(x,y)\overset{\text{יהי}}{\in}(A\cup C)\times(B\cup D)\rightarrow x\in A\cup C$ וגם $y\in B\cup D\rightarrow$

$(x\in A$ או $x\in C)$ וגם $(y\in B$ או $y\in D)\rightarrow\cdot\cdot$

$(x\in A$ וגם $y\in B)$ או $(x\in A$ וגם $y\in D)$ או $(x\in C$ וגם $y\in B)$ או $(x\in C$ וגם $y\in D)$

נוכיח ע״י דוגמא נגדית:

$A=\{1\}\quad B=\{2\}\quad C=\{3\}\quad D=\{4\}$

$\underset{\{1,3\}}{(A\cup C)}\times\underset{\{2,4\}}{(B\cup D)}=\{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4)\}$

$(A\times B)\cup(C\times D)=\{(1,2)\}\cup\{(3,4)\}=\{(1,2),(3,4)\}$

טיעון נכון!

$$(A\cup C)\times(B\cup D)=(A\times B)\cup(A\times D)\cup(C\times B)\cup(C\times D)$$

3. יהיו $U=\{1,2,3\}$ $A=\{2\}$ $B=\{3\}$

מצא: $A\times B$, $\overline{A\times B}$, $\bar{A}\times B$, $A\times\bar{B}$, $\bar{A}\times\bar{B}$

$A\times B=\{2,3\}$

$\overline{A\times B}=U^2-A\times B=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)(3,3)\}$

$\bar{A}\times B=\{1,3\}\times\{3\}=\{(1,3),(3,3)\}$

$A\times\bar{B}=\{2\}\times\{1,2\}=\{(2,1),(2,2)\}$

$\bar{A}\times\bar{B}=\{1,3\}\times\{1,2\}=\{(1,1),(1,2),(3,1),(3,2)\}$

4. הוכח:

$$(\bar{A}\times B)\cup(A\times\bar{B})\cup(\bar{A}\times\bar{B})=\overline{A\times B}$$

I צ״ל $(\bar{A}\times B)\cup(A\times\bar{B})\cup(\bar{A}\times\bar{B})\subseteq\overline{A\times B}$

II צ״ל $\overline{A\times B}\subseteq(\bar{A}\times B)\cup(A\times\bar{B})\cup(\bar{A}\times\bar{B})$

[illegible]

I נתון: $(x,y)\in(\bar{A}\times B)\cup(A\times\bar{B})\cup(\bar{A}\times\bar{B})$ צ"ל $(x,y)\in\overline{A\times B}$

$(x,y)\overset{\text{נתון}}{\in}(\bar{A}\times B)\cup(A\times\bar{B})\cup(\bar{A}\times\bar{B})\rightarrow(x,y)\notin A\times B\rightarrow(x,y)\in\overline{A\times B}$

II נתון: $(x,y)\in\overline{A\times B}$ צ"ל $(x,y)\in(\bar{A}\times B)\cup(A\times\bar{B})\cup(\bar{A}\times\bar{B})$

$(x,y)\in\overline{A\times B}\rightarrow(x,y)\in A\times B\rightarrow x\notin A$ או $y\notin B\rightarrow$

$x\in\bar{A}$ או $y\in\bar{B}\rightarrow(x\in\bar{A}$ וגם $y\in U)$ או $(y\in\bar{B}$ וגם $x\in U)\rightarrow$

$(x\in\bar{A}$ וגם $y\in B\cup\bar{B})$ או $(y\in\bar{B}$ וגם $x\in A\cup\bar{A})\rightarrow$

$(x\in\bar{A}$ וגם $y\in B)$ או $(x\in\bar{A}$ וגם $y\in\bar{B})$ או $(y\in\bar{B}$ וגם $x\in A)$ או $(y\in\bar{B}$ וגם $x\in\bar{A})\rightarrow$

$(x,y)\in\bar{A}\times B$ או $\underbrace{(x,y)\in\bar{A}\times\bar{B}}$ או $(x,y)\in A\times\bar{B}$ או $\underbrace{(x,y)\in\bar{A}\times\bar{B}}\rightarrow$

$(x,y)\in(\bar{A}\times B)\cup(A\times\bar{B})\cup(\bar{A}\times\bar{B})$